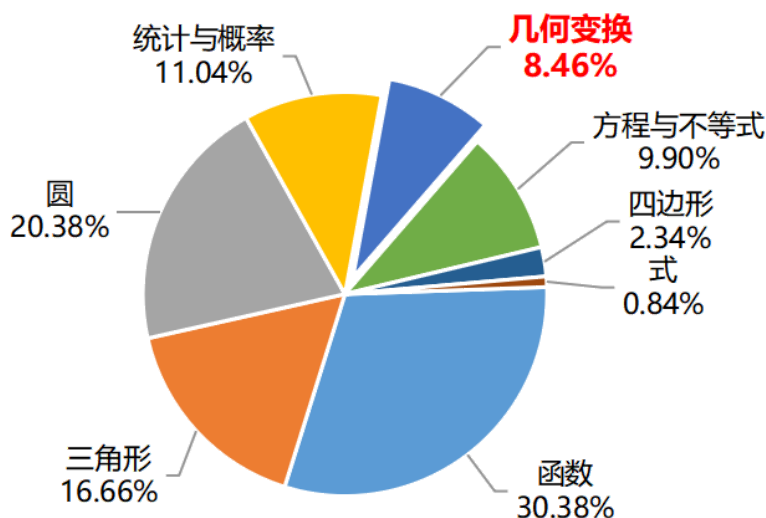


第1讲 旋转中的隐圆问题

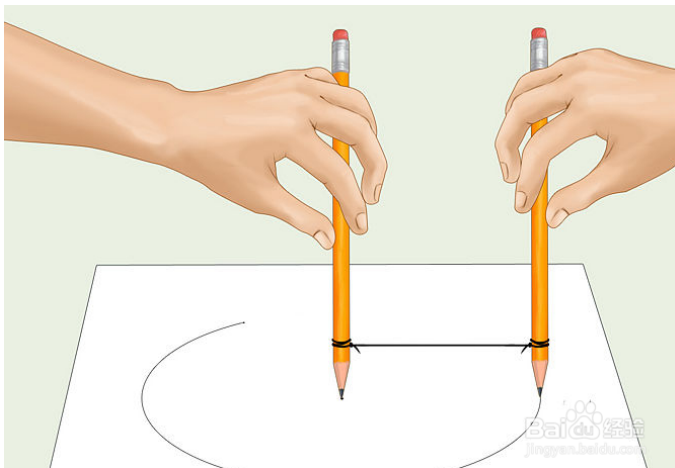
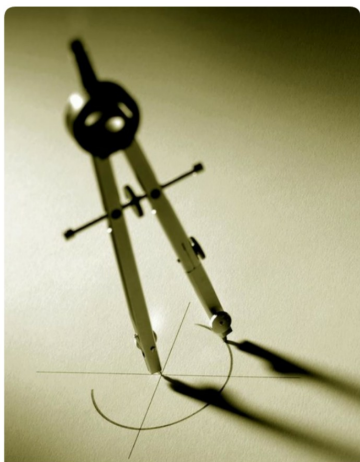
旋转属于人教版教材第二十三章的内容，会与三角形、四边形的性质进行综合，本模块为《旋转进阶》，重点包括旋转性质的综合应用，此外需要学生在理解性质的基础上，学会旋转模型，总结一定的解题思路。

本模块难度适中，适用于基础部分的夯实与综合应用，本模块分为旋转的概念及性质、旋转基本模型2讲内容，加油站与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

知己知彼



知识点	难度	考频
旋转与中心对称	★★★	高
手拉手模型	★★★★	中
角含半角模型	★★★★	中
对角互补模型	★★★★	中



□知识回顾：

圆的定义：

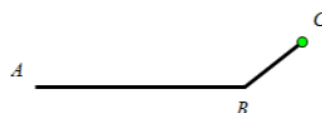
①描述性定义：在一个平面内，线段 OA 绕它_____的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 所形成的图形叫做_____，其中固定端点 O 叫做_____， OA 叫做_____。

②集合性定义：平面内到_____的距离等于_____的点的集合叫做圆，定点叫做_____，定长叫做_____。

□思考一：

已知 $AB = 3$, $BC = 2$ 共端点的两条线段如图所示，线段 BC 绕点 B 旋转一周，则 AC 的最大值及最小值是？

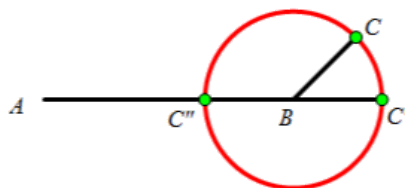
图一



【思路点拨】

画出动点 C 运动轨迹，即如图二所示 $\odot B$ ，与直线 AB 交于 C 、 C'' 两点，利用变关系寻找最值，即定点，动点，旋转中心三点共线时。

图二



AC 最小值为 $AC'' = 3 - 2 = 1$ A ————— C''

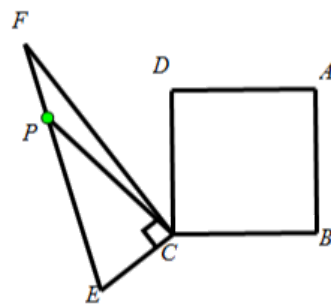
AC 最大值为 $AC' = 3 + 2 = 5$ A ————— C'

！总结：

当 A （定点）、 B （圆心）、 C （动点）三点共线时，出现 AC 的最大值与最小值，即“一箭穿心”

思考二：

已知，如图一：已知正方形 $ABCD$ ，直角三角形 CEF ，点 P 在线段 EF 上，将 $\triangle CEF$ 绕点 C 旋转 360° ，求 BP 的最值。



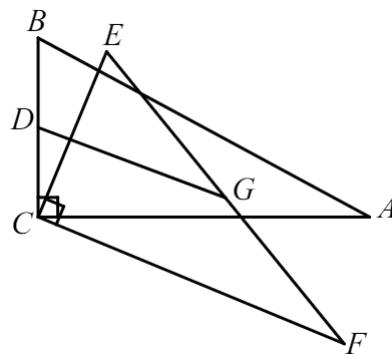
图一

一、绕某点运动问题

举个“栗子”

栗子1

- 如图，在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $BC = 4$ ， BC 的中点为 D ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转任意一个角度得到 $\triangle FEC$ ， EF 的中点为 G ，连接 DG ，在旋转的过程中， DG 的最大值是（ ）。



A. 6

B. $2 + 2\sqrt{3}$

C. $4 + \sqrt{3}$

D. $3 + 2\sqrt{3}$

2. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4$, $BC = 5$, $\angle ACB = 45^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 按逆时针方向旋转, 得到 $\triangle A_1BC_1$.

(1) 如图1, 当点 C_1 在线段 CA 的延长线上时, 求 $\angle CC_1A_1$ 的度数.

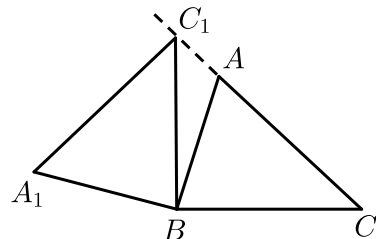


图 1

(2) 如图2, 连接 AA_1 , CC_1 . 若 $\triangle ABA_1$ 的面积为4, 求 $\triangle CBC_1$ 的面积.

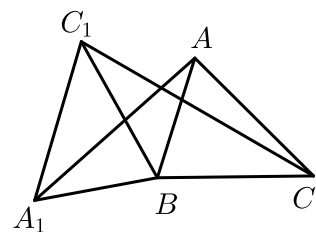


图 2

(3) 如图3, 点 E 为线段 AB 中点, 点 P 是线段 AC 上的动点, 在 $\triangle ABC$ 绕点 B 按逆时针方向旋转过程中, 点 P 的对应点是点 P_1 , 求出线段 EP_1 长度的取值范围长度.

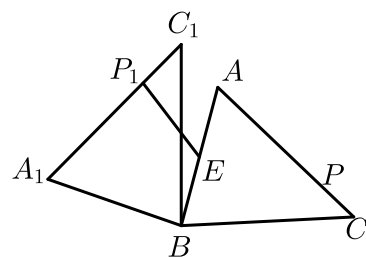
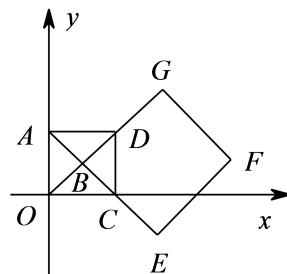


图 3

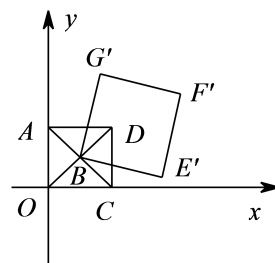
3. 在平面直角坐标系中， O 为坐标原点，点 $A(0,1)$ ，点 $C(1,0)$ ，正方形 $AOCD$ 的两条对角线的交点为 B ，延长 BD 至点 G ，使 $DG = BD$ ，延长 BC 至点 E ，使 $CE = BC$ ，以 BG ， BE 为邻边做正方形 $BEFG$ 。

(1) 如图①，求 OD 的长及 $\frac{AB}{BG}$ 的值。



图①

- (2) 如图②，正方形 $AOCD$ 固定，将正方形 $BEFG$ 绕点 B 逆时针旋转，得正方形 $BE'F'G'$ ，记旋转角为 α ($0^\circ < \alpha < 360^\circ$)，连接 AG' 。



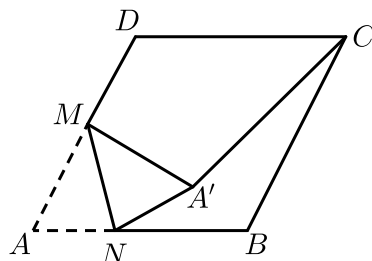
图②

- ① 在旋转过程中，当 $\angle BAG' = 90^\circ$ 时，求 α 的大小。
- ② 在旋转过程中，求 AF' 的长取最大值时，点 F' 的坐标及此时 α 的大小（直接写出结果即可）。

二、到某点定长问题

栗子3

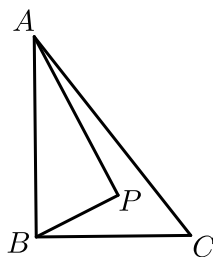
4. 如图，在边长为4的菱形 $ABCD$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， M 是 AD 边的中点，点 N 是 AB 边上一动点，将 $\triangle AMN$ 沿 MN 所在的直线翻折得到 $\triangle A'MN$ ，连接 $A'C$ ，则线段 $A'C$ 长度的最小值是_____。



三、定角问题

栗子4

5. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB \perp BC$ ， $AB = 6$ ， $BC = 4$ ， P 是 $\triangle ABC$ 内部的一个动点，且满足 $\angle PAB = \angle PBC$ ，则线段 CP 长的最小值为（ ）。



A. $\frac{3}{2}$

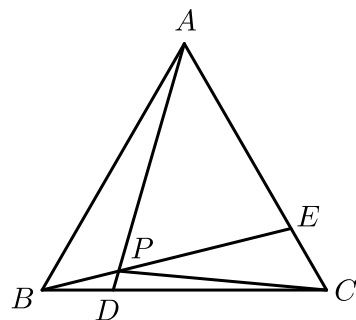
B. 2

C. $\frac{8\sqrt{13}}{13}$

D. $\frac{12\sqrt{13}}{13}$

独步天下2

6. 如图，边长为3的等边 $\triangle ABC$ ， D 、 E 分别为边 BC 、 AC 上的点，且 $BD = CE$ ， AD 、 BE 交于 P 点，则 CP 的最小值为_____。

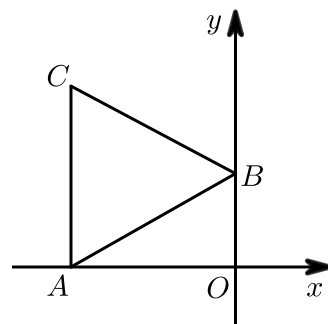


四、构造中位线问题

栗子5

7. 在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(-3, 0)$ ，点 $B(0, \sqrt{3})$ 。以 AB 为一边作等边三角形 ABC ，点 C 在第二象限。

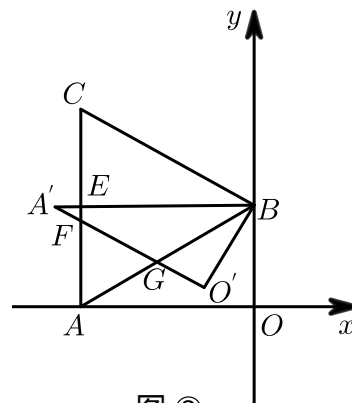
(1) 如图①，求点 C 的坐标。



图①

(2) 将 $\triangle AOB$ 绕点 B 顺时针旋转得 $\triangle A'O'B$ ，点 A 、 O 旋转后的对应点为 A' 、 O' 。

① 如图②，当旋转角为 30° 时， $A'B$ 、 $A'O'$ 与 AC 分别交于点 E 、 F 。 $A'O'$ 与 AB 交于点 G ，求 $\triangle A'O'B$ 与 $\triangle ABC$ 公共部分面积 S 的值。

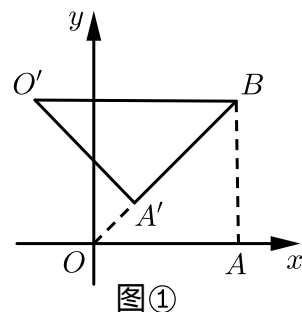


图②

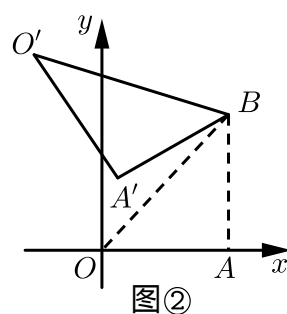
② 若 P 为线段 CO' 的中点，求 AP 长的取值范围（直接写出结果即可）。

8. 在平面直角坐标系中，点 $A(2,0)$ ，点 $B(2,2)$ ，将 $\triangle OAB$ 绕点 B 顺时针旋转，得 $\triangle O'A'B$ ，点 A ， O 旋转后的对应点为 A' ， O' ，记旋转角为 α 。

(1) 如图①，当 $\alpha = 45^\circ$ 时，求点 A' 的坐标。



(2) 如图②，当 $\alpha = 60^\circ$ 时，求点 A' 的坐标。



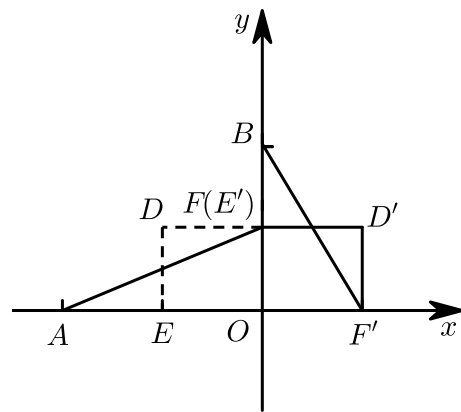
(3) 连接 OA' ，设线段 OA' 的中点为 M ，连接 $O'M$ 。求线段 $O'M$ 的长的最小值（直接写出结果即可）。

五、切线问题

栗子6

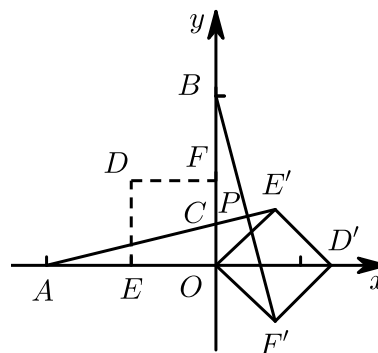
9. 在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(-2, 0)$ ，点 $B(0, 2)$ ，点 E ，点 F 分别为 OA ， OB 的中点．
若正方形 $OEDF$ 绕点 O 顺时针旋转，得正方形 $OE'D'F'$ ，记旋转角为 α ．

(1) 如图①，当 $\alpha = 90^\circ$ ，求 AE' ， BF' 的长．



图①

(2) 如图②，当 $\alpha = 135^\circ$ ，求证 $AE' = BF'$ ，且 $AE' \perp BF'$ ．



图②

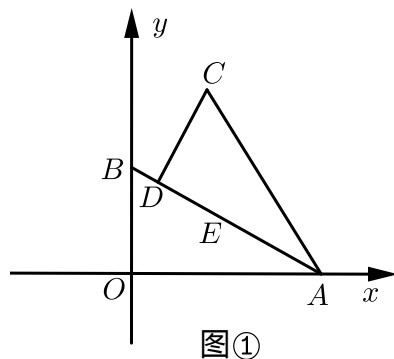
(3) 若直线 AE' 与直线 BF' 相交于点 P ，求点 P 的纵坐标的最大值（直接写出结果即可）．

六、面积最值问题

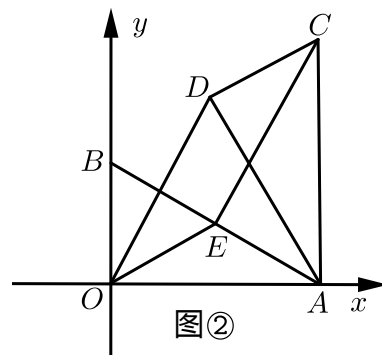
栗子7

10. 在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(\sqrt{3}, 0)$ ，点 $B(0, 1)$ ，点 E 是边 AB 中点，把 $\triangle ABO$ 绕点 A 顺时针旋转，得 $\triangle ADC$ ，点 O ， B 旋转后的对应点分别为 D ， C ，记旋转角为 α 。

(1) 如图①，当点 D 恰好在 AB 上时，求点 D 的坐标。



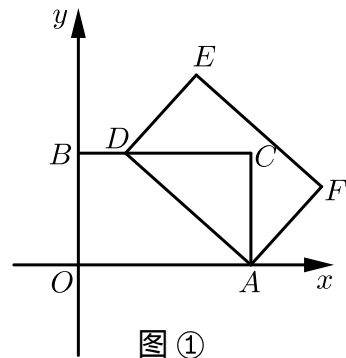
(2) 如图②，若 $\alpha = 60^\circ$ 时，求证：四边形 $OECD$ 是平行四边形。



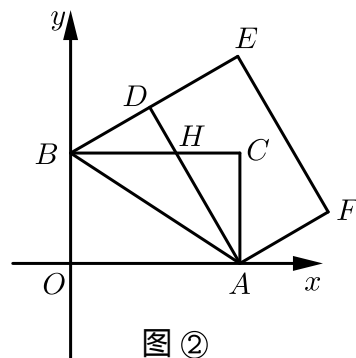
(3) 连接 OC ，在旋转的过程中，求 $\triangle OEC$ 面积的最大值（直接写出结果即可）。

11. 在平面直角坐标系中，四边形 $AOBC$ 是矩形，点 $O(0,0)$ ，点 $A(5,0)$ ，点 $B(0,3)$ ，以点 A 为中心，顺时针旋转矩形 $AOBC$ ，得到矩形 $ADEF$ ，点 O, B, C 的对应点分别为 D, E, F 。

(1) 如图①，当点 D 落在 BC 边上时，求点 D 的坐标。



(2) 如图②，当点 D 落在线段 BE 上时， AD 与 BC 交于点 H 。



- ① 求证 $\triangle ADB \cong \triangle AOB$ 。
 - ② 求点 H 的坐标。
- (3) 记 K 为矩形 $AOBC$ 对角线的交点， S 为 $\triangle KDE$ 的面积，求 S 的取值范围（直接写出结果即可）。